ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 517.5

Поточкові оцінки односторонніх наближень одного класу сингулярних інтегралів

А. М. Пасько*, **О. О. Колесник****

* Дніпропетровський Національний Університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. *E-mail: pasko08@meta.ua*

** Дніпропетровський Національний Університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. *E-mail: alexey.kolesnik1@gmail.com*

Знайдена оцінка наближення класа $\breve{W}^r_\infty$, $r \geq 1$ з урахуванням розташування точки на відрізку .

Ключові слова: **модуль неперервності, алгебраїчний поліном, найкраще наближення.**

Найдена оценка приближения класса $\breve{W}^r_\infty$, $r \geq 1$ с учётом положения точки на отрезке.

Ключевые слова: **модуль непрерывности, алгебраический полином, наилучшее приближение.**

The pointwise estimation of the approximation to the class $\breve{W}^r_\infty$, $r \geq 1$ by algebraic polinomials is established.

Key words: **module of continuity, algebraic polynomial, the best approximation.**

Нехай W^r_∞, $r > 0$, – клас функцій $f_r(x)$, визначених на відрізку $[-1; 1]$ рівністю

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f(t)dt + P(x),$$

де $\Gamma(r)$ – гама-функція Ейлера, функція $f(t)$ вимірна та $|f(t)| \leq 1$ майже скрізь, $P(x)$ – алгебраїчний поліном степені не вище $[r-1]$ ([a] – ціла частина a).

Через $\breve{W}^r_\infty$, позначається клас функцій $S_\rho(f)$, які можна подати у вигляді сингулярного інтеграла який розуміється в сенсі головного значення,

$$S(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{(1- \ t^2)}dt,$$

де $x \in (-1; 1)$, $f \in W^r_\infty$.

В. П. Моторний у роботі [1] встановив наступну оцінку.

Теорема 1. *Для довільного числа $r > 0$ та довільної функції $f \in \breve{W}^r_\infty$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P_n(x)$, $n \geq r+1$, така, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r\right),$$

де величина C_r залежить тільки від r.

Основним результатом даної роботи є наступний аналог теореми 1 для випадку односторонніх наближень.

Теорема 2. *Для довільного числа $r \geq 1$ та довільної функції $f \in \breve{W}^r_\infty$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P^+_{n,r}(x) :\ \forall x \in [-1;1]$*

$$0 \leq P^+_{n,r}(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} +$$

$$+C_r\left(\frac{1}{n^{r+\{r\}}}(\sqrt{1-x^2})^{[r]+1} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r\right), \tag{1}$$

якщо $[r]$ – непарне, та

$$0 \leq P^+_{n,r}(x) - f(x) \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} +$$

$$+C_r\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^r + \frac{(\sqrt{1-x^2})^{[r]}}{n^{r+\{r\}}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)\right), \tag{2}$$

якщо $[r]$ – парне. Тут $\{r\}$ означає дробову частину числа r.

Для доведення теореми 2 нам будуть потрібні наступні три леми.

Лема 1. *Нехай β – довільна стала, $\beta > 0$, ω – модуль неперервності. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ існує алгебраїчний поліном $q_n(x)$ степеня не вищого за $n, \forall x \in [-1;1]$*

$$\left|\omega\left(\frac{\beta}{n}\sqrt{1-x^2}\right) - q_n(x)\right| \leq C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3}$$

де C залежить тільки від β.

Лема 2. *Нехай β – довільна стала, $\beta > 0$ ω – модуль неперервності. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ існує алгебраїчний поліном $q_n(x)$ степеня не вищого за $n, \forall x \in [-1;1]$*

$$0 \leq q_n(x) - \sqrt{1-x^2}\,\omega\left(\frac{\beta}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \leq$$

$$\leq C\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

де C залежить тільки від β.

Лема 3. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0;1]$. Для довільного натурального $n \geq 4m$ існує алгебраїчний поліном $H^+_{n,m}(x)$ степеня не вищого за n, що задовольняє нерівності*

$$0 \leq H^+_{n,m}(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m+\alpha} \leq \frac{C_m}{n^\alpha}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^m.$$

Леми 1 та 3 доведені в [2].

Лема 2 доведена в [3]

Доведення теореми 2. Нерівність (3) перепишемо у вигляді

$$0 \leq P^+_{n,r}(x) - f(x) \leq \frac{\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} +$$

$$+C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r \leq \frac{2\tilde{K}_r}{n^r}(\sqrt{1-x^2})^{r+1} +$$

$$+C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r. \tag{4}$$

Покладемо $r = m + \alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (0;1]$ (за нецілого r $m = [r]$, $\alpha = \{r\}$).

Нехай m – непарне. Застосувавши лему 1 до модуля неперервності $\omega(t) = t^\alpha$ отримаємо, що існує послідовність алгебраїчних поліномів $q^+_n(x)$:

$$0 \leq q^+_n(x) - \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha \leq \frac{C}{n^{2\alpha}}. \tag{5}$$

З леми 3 випливає, що

$$0 \leq H^+_{n,m}(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m+\alpha} \leq \frac{C_m}{n^\alpha}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^m. \tag{6}$$

Додавши нерівність (4) з помноженою на $\frac{\tilde{K}_r}{n^m}(\sqrt{1-x^2})^{m+1}$ нерівністю (5) та помноженою на $C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}$ нерівністю (6) та виконавши нескладні перетворення отримаємо нерівність (1).

Нехай m – парне. Застосувавши лему 2 до модуля неперервності $\omega(t) = t^\alpha$ отримаємо, що існує послідовність поліномів q^+_n :

$$0 \leq q^+_n(x) - \sqrt{1-x^2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha \leq C\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{2\alpha}}. \tag{7}$$

Додавши нерівність (4) з помноженою на $K_r n^{-m}(\sqrt{1-x^2})^m$ нерівністю (7) та помноженою на $C_r\frac{\ln n}{n^{r+1}}$ нерівністю (6) та виконавши нескладні перетворення отримаємо (2). Теорема доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Моторный В. П.** Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами. / В. П. Моторный // Укр. мат. журнал. – 2001. – 53, №3. – С. 331–345.
2. **Пасько А. Н.** Наилучшее одностороннее приближение классов WH^{ω} с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Математика». – 2005. – Вип. 10. – С. 86–91.
3. **Пасько А. Н.** Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Математика». – 2009. – Вип. 14. – С. 99–102.

Надійшла до редколегії 05.03.2013